



مراد کریمی  
دبیر ریاضی  
دبیرستان‌های شهر کرد

# حد مجموع مساحت‌ها و محیط‌ها!

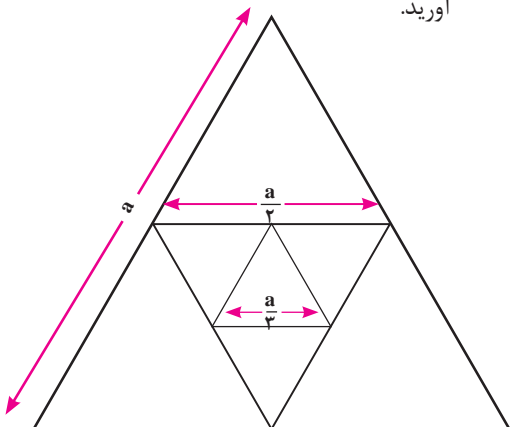
**نتیجه:** اگر وسط‌های اضلاع یک  $n$  ضلعی منتظم را متوالیاً بهم وصل کنیم تا  $n$  ضلعی‌های جدید به وجود آیند، در این صورت:

۱. دنباله محیط‌های  $n$  ضلعی‌ها، دنباله هندسی با قدرنسبت  $q = \cos \frac{\pi}{n}$  است.

۲. دنباله مساحت‌های  $n$  ضلعی‌ها، دنباله هندسی با قدرنسبت  $q = \cos^2 \frac{\pi}{n}$  است.

برای روشن شدن موضوع، در ادامه محیط و مساحت سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع)، چهار ضلعی منتظم (مربع) و شش ضلعی منتظم به طول ضلع  $a$  را محاسبه می‌کنیم.

**مسئله ۱.** وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  را متوالیاً بهم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی به دست آید و این کار را ادامه می‌دهیم. الف) مجموع محیط‌های همه این مثلث‌ها را به دست آورید.



**توضیح:** می‌دانیم مجموع جملات یک تصاعد هندسی

متناهی که  $|q| > 1$  باشد، از فرمول  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

محاسبه می‌شود. اما اگر قدرنسبت یک دنباله هندسی

نامتناهی بین  $-1$  و  $1$  باشد ( $|q| < 1$ )، جملات این دنباله با

افزایش  $n$  به صفر نزدیک می‌شوند و مجموع تمام جملات

دنباله از رابطه  $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$  به دست می‌آید که این مقدار

را «حد مجموع جملات» می‌نامند.

دلیل این امر آن است که وقتی  $-1 < q < 1$  باشد،

آن‌گاه با بزرگ شدن  $n$  حاصل  $q^n$  به صفر نزدیک‌تر

می‌شود، به طوری که برای  $n$ های بسیار بزرگ،  $q^n \approx 0$ .

بنابراین داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{-1 < q < 1} S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

**تذکر:** منظور از « $S_\infty$ » مجموع بی‌شمار جمله از دنباله است که گاه آن را فقط با  $S$  نمایش می‌دهند.

**نکته:** یک  $n$  ضلعی منتظم به طول ضلع  $a$  را

در نظر بگیرید. هرگاه وسط‌های اضلاع این  $n$

ضلعی را متوالیاً بهم وصل کنیم و این عمل

را به‌طور نامتناهی ادامه دهیم، اضلاع این  $n$

ضلعی‌ها جملات یک دنباله هندسی نزولی را

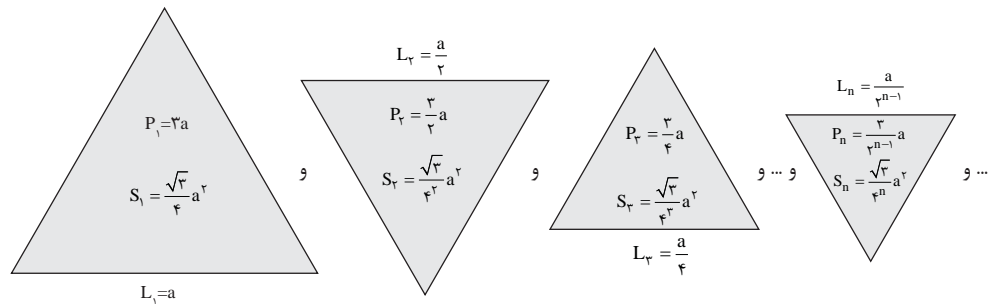
تشکیل می‌دهند که در نتیجه محیط و مساحت

این  $n$  ضلعی‌ها نیز جملات دنباله هندسی نزولی

را تشکیل می‌دهند.

ب) مجموع مساحت‌های همه این مثلث‌ها را حساب کنید.

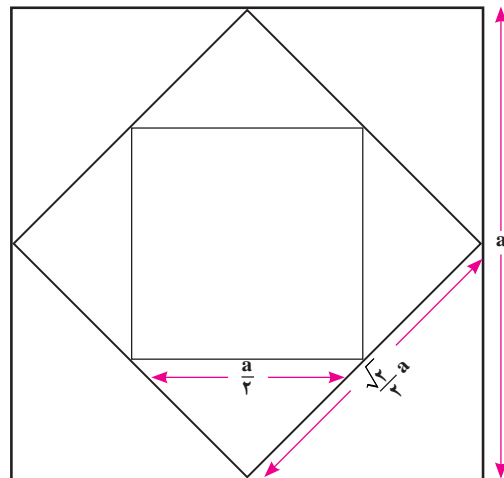
شماره مثلث متساوی‌الاضلاع (n)	۱	۲	۳	...	n	...
طول ضلع متساوی‌الاضلاع ( $L_n$ )	$L_1 = a$	$L_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$L_3 = \frac{a}{\sqrt{4}}$	...	$L_n = \frac{a}{\sqrt{n-1}}$	...
محیط مثلث متساوی‌الاضلاع ( $P_n$ )	$P_1 = 3a$	$P_2 = \frac{3}{2}a$	$P_3 = \frac{3}{4}a$	...	$P_n = \frac{3}{\sqrt{n-1}}a$	...
مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ( $S_n$ )	$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4^2}a^2$	$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4^3}a^2$	...	$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4^n}a^2$	...



$$\text{مجموع جملات دنبالهٔ اضلاع مثلث‌ها} = L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n + \dots = a + \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{a}{\sqrt{n-1}} + \dots = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$$

$$\text{مجموع محیط‌های مثلث‌ها} = P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n + \dots = 3a + \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}a + \dots + \frac{3}{\sqrt{n-1}}a + \dots = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$$

$$\begin{aligned} \text{مجموع مساحت‌های مثلث‌ها} = S &= S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4^2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4^3}a^2 + \dots + \frac{\sqrt{3}}{4^n}a^2 + \dots \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2 \end{aligned}$$

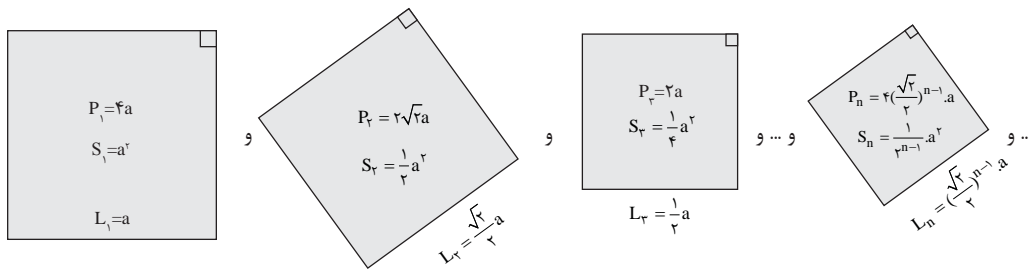


**مسئله ۲.** وسط‌های اضلاع یک مربع به ضلع  $a$  را متوالیاً بهم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی به وجود آید و این کار را ادامه می‌دهیم.

الف) مجموع محیط‌های همهٔ مربع‌ها را به دست آورید.

ب) مجموع مساحت‌های همهٔ مربع‌ها را حساب کنید.

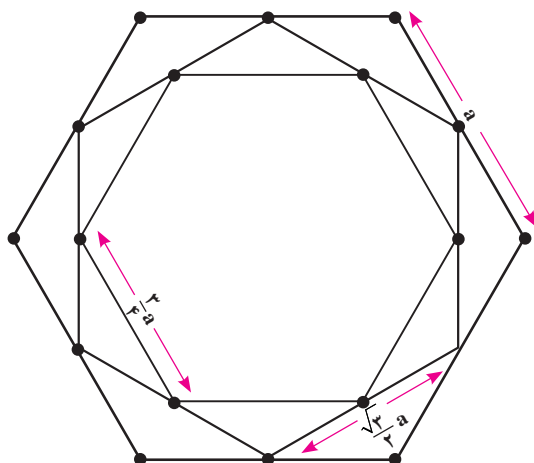
شماره مربع (n)	۱	۲	۳	...	n	...
طول ضلع مربع ( $L_n$ )	$L_1 = a$	$L_2 = \frac{\sqrt{r}}{r} a$	$L_3 = \frac{1}{r} a$	...	$L_n = \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^{n-1} \cdot a$	...
محیط مربعها ( $P_n$ )	$P_1 = 4a$	$P_2 = 2\sqrt{r}a$	$P_3 = 2a$	...	$P_n = 4\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^{n-1} \cdot a$	...
مساحت مربعها ( $S_n$ )	$S_1 = a^2$	$S_2 = \frac{1}{r} a^2$	$S_3 = \frac{1}{r^2} a^2$	...	$S_n = \frac{1}{r^{n-1}} \cdot a^2$	...



مجموع جملات دنباله اضلاع مربعها  $= L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n + \dots = a + \frac{\sqrt{r}}{r}a + \frac{a}{r} + \dots + \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^{n-1}a + \dots = \frac{a}{1 - \frac{\sqrt{r}}{r}} = (r + \sqrt{r})a$

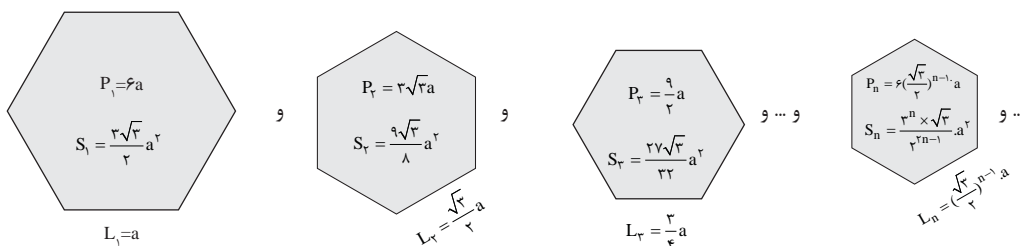
مجموع محیطهای همه مربعها  $= P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n + \dots = 4a + 2\sqrt{r}a + 2a + \dots + 4\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^{n-1}a + \dots = \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{r}}{r}} = (r + \sqrt{r})4a$

مجموع مساحتهای همه مربعها  $= S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots = a^2 + \frac{a^2}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}} \cdot a^2 + \dots = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{r}} = r a^2$



**مسئله ۳.** وسطهای اضلاع یک ضلعی منتظم به ضلع  $a$  را متوالیاً بهم وصل می‌کنیم تا شش ضلعی جدیدی به وجود آید و این کار را ادامه می‌دهیم. مجموع محیطها و مجموع مساحتهای همه شش ضلعی‌ها را به دست آورید.

شماره شش ضلعی منتظم (n)	۱	۲	۳	...	n	...
طول شش ضلعی منتظم (L <sub>n</sub> )	L <sub>۱</sub> =a	L <sub>۲</sub> = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$	L <sub>۳</sub> = $\frac{۳}{۴}a$	...	L <sub>n</sub> = $(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{n-1} \cdot a$	...
محیط شش ضلعی منتظم (P <sub>n</sub> )	P <sub>۱</sub> =۶a	P <sub>۲</sub> = ۳√۳a	P <sub>۳</sub> = $\frac{۹}{۲}a$	...	P <sub>n</sub> = $۶(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{n-1} \cdot a$	...
مساحت شش ضلعی منتظم (S <sub>n</sub> )	S <sub>۱</sub> = $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$	S <sub>۲</sub> = $\frac{۹\sqrt{۳}}{۸}a^۲$	S <sub>۳</sub> = $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۳۲}a^۲$	...	S <sub>n</sub> = $\frac{۳^n \times \sqrt{۳}}{۲^{2n-1}} \cdot a^۲$	...



$$\text{مجموع جملات دنباله اضلاع شش ضلعی ها} = L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n + \dots = a + \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{3}{4}a + \dots + (\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1} \cdot a = \frac{a}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = (2 + \sqrt{3})2a$$

$$\text{مجموع محیط های همه شش ضلعی ها} = P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n + \dots = 6a + 3\sqrt{3}a + \frac{9}{2}a + \dots + 6(\frac{\sqrt{3}}{2})^{n-1} \cdot a + \dots = \frac{6a}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = (2 + \sqrt{3})12a$$

$$\text{مجموع مساحت های همه شش ضلعی ها} = S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{9\sqrt{3}}{8}a^2 + \dots + \frac{3^n \times \sqrt{3}}{2^{2n-1}} \cdot a^2 + \dots = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2}{1 - \frac{3}{4}} = 6\sqrt{3}a^2$$

۱۵. به جای علامت سؤال چه عددی قرار می گیرد؟

و ؟ و ۲۸۴۳۱۵ و ۳۴۸۲۶۹  
۸۶ و ۸۴۲ و ۴۸۱۱ و ۸۴۳۸

**تشریح اندیشه!**

$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$   
 $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

اگر یک روز از عمرم باقی مانده باشد، ترفیح می‌دهم در کلاس ریاضی باشد، چون طولانی تر از بقیه زمان‌هاست!